Grenz-Bestimmungen

bei

Vergleichungen von Kreisen

welche

von demselben Dreieck abhängig sind,

sowohl unter sich als auch mit dem Dreieck selbst

von

Dr. D. E. L. Lehmus,
Professor der Mathematik an der königlichen Artillerie und Ingenieur-Schule
und dem Haupt-Bergwerks-Eleven-Institut in Berlin.

Leipzig,
Verlag von Carl Geibel.
1851.

Vorbemerkung.

Die Frage: wenn um ein Dreieck der Kreis und in dasselbe der berührende gebildet wird, welches Verhältniss dann zwischen beider Inhalten stattfinden kann, welches der höchste und kleinste Werth desselben ist, welche Relationen bei bestimmten Formen des Dreiecks zwischen der Verhältnisszahl der Inhalte und den Winkeln des Dreiecks stattfinden können u. s. w., gab dem Verfasser Veranlassung zu ähnlichen Untersuchungen, und da demselben nicht bekannt ist, ob solche Fragen schon von Anderen bearbeitet und gedruckt worden sind, so übergiebt derselbe hiermit seine Arbeit in einigen Lösungen der Oeffentlichkeit.

Es bezeichnen durchaus α und β die spitzen Winkel eines Dreiecks und γ den dritten. Die α gegenüberliegende Seite ist als Längeneinheit angenommen.

Nachstehende Gesetze kommen besonders in Anwendung:

Sind a und b reell und bezeichnen c und d, $c > d$ gedacht, die Werthe, welche für p in $A = p^2 + ap + b$ gesetzt, $A = 0$ liefern, so ist

1) wenn c und d sich reell ergeben,

   A positiv, für $p > c$ und auch für $p < d$;

   A negativ, für $p < c$ und $p > d$;

2) wenn c und d imaginär werden,

   A positiv für alle reellen Werthe von p.

Erste Aufgabe.

Der Inhalt des um ein Dreieck beschriebenen Kreises soll sich zu dem des in dasselbe eingeschriebenen Kreises wie n^2 zu 1 verhalten. Zu bestimmen:

I. Die Gleichung zwischen α, β, γ und n.

Es ist der Halbmesser des umschriebenen Kreises $= \frac{1}{2\sin\alpha}$; der des innern $= \sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} : \cos\frac{\alpha}{2}$ und es entsteht daher die Gleichung:

1) $4n\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = 1.$

II. Die Grenzen für n.

Wird $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ für $\sin\frac{\gamma}{2}$ gesetzt, so folgen für die Ableitungen des Produkts $\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$ nach α und β die Ausdrücke $\frac{1}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)$ und $\frac{1}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)$ und geben, gleich Null gesetzt,

2) $n^2 = 4$ als absolutes Minimum zu $\alpha = \beta = \gamma$.

Als Grenzwerth entsteht, sowohl wenn zwei Seiten der Parallelität nahe kommen, als auch, wenn die Summe zweier Seiten des Dreiecks nahe gleich der dritten wird,

3) $n^2 =$ unendlich gross.

III. Die Relation zwischen α und n, wenn $\gamma = 90^0$ sein soll.

Wird in 1) $\sqrt{\frac{1}{2}}$ für $\sin\frac{\gamma}{2}$ und $\sin\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)$ für $\sin\frac{\beta}{2}$ eingeführt, so entsteht

4) $n = \frac{1}{\sin\alpha + \cos\alpha - 1}$ und hieraus

5) $n = 1 + \sqrt{2}$, also $n^2 = 3 + 2\sqrt{2}$ als Minimum zu $\alpha = 45^0$, sowie

6) $n = \infty$ als Grenzwerth sowohl zu $\alpha = 0$ als auch zu $\alpha = 90^0$.

Zu allen Werthen von $n^2 = 3 + 2\sqrt{2}$ bis $n = \infty$ existiren also rechtwinklige entsprechende Dreiecke; zu allen Werthen von $n^2 = 4$ bis $n^2 < 3 + 2\sqrt{2}$ aber nur spitzwinklige.

Durch Entwicklung folgt aus 4)

7) $\sin 2\alpha = \frac{1+2n}{n^2}$ zur Bestimmung von α, wenn n gegeben ist, und zwar von $n = 1 + \sqrt{2}$ bis $n = \infty$.

IV. Die Gleichung zwischen γ und n fürs gleichschenklige Dreieck, also für $\alpha = \beta$.

Wird $90 - \frac{\gamma}{2}$ für α und β in 1) gesetzt, so folgt

8) $n = \frac{1}{2 \sin \frac{\gamma}{2}\left(1 - \sin \frac{\gamma}{2}\right)}$ und hieraus

9) $n = 2$ als Minimum zu $\gamma = 60^0$.

Die Grenzwerthe bleiben die allgemeinen, unendlich gross. Aus 8) ergiebt sich

10) $\sin \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{n-2}{4n}}$

und es existiren daher zu allen Werthen von n von $n = 2$ bis $n = \infty$ immer zwei gleichschenklige Dreiecke. Ist $n > 1 + \sqrt{2}$, so wird γ stumpf; ist $n < 1 + \sqrt{2}$, so wird γ spitz.

V. Die Abhängigkeit der Werthe von α und n von einander, wenn überhaupt entsprechende Dreiecke existiren sollen.

Aus $4n \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha+\beta}{2}$ folgt

11) $\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right) = \sin \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2n} \operatorname{cosec} \frac{\alpha}{2}$ und hieraus, weil $\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right) \leqq 1$ sein muss,

12) $n \geqq \frac{1}{2 \sin \frac{\alpha}{2}\left(1 - \sin \frac{\alpha}{2}\right)}$.

Die Entwicklung von $\sin\frac{\alpha}{2}$ aus 12) giebt

13) $\sin\frac{\alpha}{2} \geqq \frac{1}{2}\left[1-\sqrt{\left(1-\frac{2}{n}\right)}\right]$ und

13) $\sin\frac{\alpha}{2} \leqq \frac{1}{2}\left[1+\sqrt{\left(1-\frac{2}{n}\right)}\right].$

VI. Beispiele:

1. Gegeben $\gamma = 90^0$ und $\alpha = 30^0$; gesucht n.
$$n = 1 + \sqrt{3}.$$
2. Gegeben $\gamma = 90^0$ und $n = 10$; gesucht α.
$$\sin 2\alpha = 0{,}21;\ \alpha = 6^0 3' 40''.$$
3. Gegeben $\alpha = \beta$; $\gamma = 72^0$; gesucht n.
$$n = 2{,}52014\ldots$$
4. Gegeben $\alpha = \beta$; $\gamma = 120^0$; gesucht n.
$$n = 2 + \tfrac{4}{3}\sqrt{3}.$$
5. Gegeben $\alpha = \beta$: $n = \frac{32}{15}$; gesucht γ.
$$\gamma = 77^0 21' 51'';\ \text{auch}\ \gamma = 44^0 2' 55''.$$
6. Gegeben $\alpha = \beta$; $n = 20$; gesucht γ.
$$\gamma = 153^0 59' 6'';\ \text{auch}\ \gamma = 2^0 56' 26''.$$
7. Gegeben $\alpha = 36^0$; gesucht der Grenzwerth für n.
$$n \geqq 2{,}34164.$$
8. Gegeben $\alpha = 36^0$; $n = 3$; gesucht β, γ.
$$\beta = 40^0 2' 2'';\ \gamma = 103^0 57' 58''.$$
9. Gegeben $n = 4$; gesucht der Grenzwerth für α.
$$\alpha \geqq 16^0\ 50' 32''.$$
10. Gegeben $n = 4$; $\alpha = 60^0$; gesucht β und γ.
$$\beta = 4^0 13' 44'';\ \gamma = 115^0 46' 16''.$$

Zusatz. Die Aufgabe: In ein Dreieck ist der berührende Kreis beschrieben und die drei Berührungspunkte sind durch Gerade verbunden; es soll sich der Inhalt des äussern Dreiecks zu dem des innern wie n zu 1 verhalten, führt auf die Gleichung $2n\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = 1$ und die Uebereinstimmung derselben mit der hier gelösten, nur dass hier n die Stelle von n^2 einnimmt und nur 2, nicht 4, als Faktor vorkommt, giebt zugleich die Lösung dieser neuen Aufgabe.

Zweite Aufgabe.

Der Inhalt eines Dreiecks soll sich zu dem des in dasselbe eingeschriebenen Kreises wie n zu 1 verhalten. Zu bestimmen:

I. Die Gleichung zwischen α, β, γ und n.

Der Ausdruck für den Inhalt des Dreiecks ist $\frac{\sin\beta \sin\gamma}{2\sin\alpha}$; der fü den Halbmesser des innern berührenden Kreises $\sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2} : \cos\frac{\alpha}{2}$; wird nun

1) $n\pi$ durch m bezeichnet, so entsteht die Bedingungsgleichung

2) $m\, tg\frac{\alpha}{2} \cdot tg\frac{\beta}{2} \cdot tg\frac{\gamma}{2} = 1.$

II. Die Grenzen für m.

Aus $m = \dfrac{tg\frac{\alpha+\beta}{2}}{tg\frac{\alpha}{2} \cdot tg\frac{\beta}{2}}$ folgt

3) $m = 3\sqrt{3}$ als absolutes Minimum zu $\alpha = \beta = \gamma$, sowie auch, dass

4) $m = \infty$ der Grenzwerth für m ist.

III. Die Gleichung zwischen α und m, wenn rechtwinklige Dreiecke entsprechen sollen.

Wird in 2) 90^0 für γ und $45^0 - \frac{\alpha}{2}$ für $\frac{\beta}{2}$ gesetzt, so folgt

5) $m = cotg\frac{\alpha}{2} \cdot cotg\left(45 - \frac{\alpha}{2}\right)$ oder auch

6) $m = \dfrac{1 + tg\frac{\alpha}{2}}{tg\frac{\alpha}{2}\left(1 - tg\frac{\alpha}{2}\right)}$; und hieraus

7) $m = 3 + 2\sqrt{2}$ als Minimum zu $\alpha = 45^0$ und

8) $m = \infty$ als Grenzwerth sowohl zu $\alpha = 0$ als auch zu $\alpha = 90^0$.

Aus 6) entsteht

9) $tg\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2m}\,[m - 1 \pm \sqrt{(m^2 - 6m + 1)}]$

und giebt nur Werthe für α, wenn

10) $m \geqq 3 + 2\sqrt{2}$ ist.

Zu allen Werthen für m von $3\sqrt{3}$ bis $< 3+2\sqrt{2}$ existiren also nur spitzwinklige; zu $m=3+2\sqrt{2}$ bis $< \infty$ rechtwinklige Dreiecke.

IV. Die Gleichung zwischen γ und m für gleichschenklige Dreiecke.

Es entsteht, wenn $45-\frac{\gamma}{4}$ sowohl für $\frac{\alpha}{2}$ als für $\frac{\beta}{2}$ in 2) gesetzt wird

11) $m=\dfrac{2\left(1+\sin\frac{\gamma}{2}\right)^2}{\sin\gamma}$ oder auch

12) $m=\dfrac{1+\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}\cdot\sqrt{\dfrac{1+\sin\frac{\gamma}{2}}{1-\sin\frac{\gamma}{2}}}$, woraus hervorgeht, dass zu $\gamma=60^0$

$m=3\sqrt{3}$ ein Minimum wird, aber zugleich aus III. erhellet, dass γ ein spitzer Winkel bleibt von $m=3\sqrt{3}$ bis $<3+2\sqrt{2}$, und erst dann stumpf wird, wenn $m>3+2\sqrt{2}$ angenommen wird.

Soll γ durch m ausgedrückt werden, so ergiebt sich aus 12) die Gleichung

13) $(m^2+1)\sin^3\frac{\gamma}{2}-(m^2-3)\sin^2\frac{\gamma}{2}+3\sin\frac{\gamma}{2}+1=0$, welche

14) $\sin\frac{\gamma}{2}-\dfrac{m^2-3}{2(m^2+1)}$ durch x;

15) $\dfrac{m^2(m^2-15)}{3(m^2+1)^2}$ durch r und

16) $\dfrac{2m^2}{27}\cdot\dfrac{m^4-36m^2+27}{(m^2+1)^3}$ durch q ausgedrückt, die Form

17) $x^3-rx-q=0$ annimmt.

Es ist aber 27 der kleinste Werth von m^2, für welchen $\left(\frac{r}{3}\right)^3=\left(\frac{q}{2}\right)^2$ wird; für jeden grösseren entsteht immer $\left(\frac{r}{3}\right)^3>\left(\frac{q}{2}\right)^2$, so dass bei Lösung der Gleichung 17) der irreduktible Fall in Anwendung kommt. Wird daher φ aus

18) $\cos\varphi=\frac{q}{2}:\left(\frac{r}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ bestimmt, so ergeben sich

19) $2\sqrt{\frac{r}{2}}\cos\frac{\varphi}{3}$; $2\sqrt{\frac{r}{3}}\cos\left(120+\frac{\varphi}{3}\right)$ und $2\sqrt{\frac{r}{3}}\cos\left(240+\frac{\varphi}{3}\right)$

als die drei Wurzeln der Gleichung 17) und es nimmt dann, wenn

20) $\dfrac{m^2-3}{2m.\sqrt{(m^2-15)}}$ durch h und

21) $\dfrac{3(m^2+1)}{2m.\sqrt{(m^2-15)}}$ durch k ausgedrückt wird, die Bedingung 17) die Gestalt an:

$$22)\ \left[\sin\frac{\gamma}{2}-\frac{h+\cos\frac{\varphi}{3}}{k}\right]\left[\sin\frac{\gamma}{2}-\frac{h+\cos\left(120+\frac{\varphi}{3}\right)}{k}\right]\left[\sin\frac{\gamma}{2}-\frac{h+\cos\left(240+\frac{\varphi}{3}\right)}{k}\right]=0.$$

Weil aber in stetiger Aufeinanderfolge von $m^2=27$ bis $m^2=\infty$

φ alle Werthe von 180^0 bis 0

h . . . . $\frac{2}{3}$ . . . $\frac{1}{2}$

k . . . . $\frac{7}{3}$ . . . $\frac{3}{2}$, also

der erste Faktor in 22) ......$\sin\frac{\gamma}{2}-\frac{1}{2}$ bis $\sin\frac{\gamma}{2}-1$,

- zweite - - - ...... $\sin\frac{\gamma}{2}+\frac{1}{7}$ bis $\sin\frac{\gamma}{2}$

- dritte - - - ..... $\sin\frac{\gamma}{2}-\frac{1}{2}$ bis $\sin\frac{\gamma}{2}$

durchläuft, der zweite daher immer >0 bleibt, so reducirt sich die Bedingung 22) auf folgende:

$$23)\ \left[\sin\frac{\gamma}{2}-\frac{h+\cos\frac{\varphi}{3}}{k}\right]\left[\sin\frac{\gamma}{2}-\frac{h+\cos\left(240+\frac{\varphi}{3}\right)}{k}\right]=0,$$ und aus ihr folgen, nach Wiedereinführung der Werthe für r, q, h, k, zur Bestimmung von γ durch m nachstehende drei Vorschriften:

$$24)\ \cos\varphi=\frac{m^4-36m^2+27}{m(m^2-15)^{\frac{3}{2}}};$$

$$25)\ \sin\frac{\gamma}{2}=\frac{m^2-3+2m\cos\frac{\varphi}{3}\,.\sqrt{(m^2-15)}}{3(m^2+1)}$$ und auch

$$26)\ \sin\frac{\gamma}{2}=\frac{m^2-3+2m\cos\left(240+\frac{\varphi}{3}\right)\sqrt{(m^2-15)}}{3(m^2+1)},$$ welche letzteren beiden Formeln, wenn $=3\sqrt{3}$ ist, dasselbe liefern, nämlich $\gamma=60^0$.

V. Welche Abhängigkeit zwischen m und α nothwendig stattfinden muss, damit einem Dreieck entsprechende Werthe für die beiden andern Winkel existiren?

Aus 2) entspringt

27) $$tang\frac{\beta}{2} = \frac{1}{2\,m tg^2\frac{\alpha}{2}}\left[m\,tg\frac{\alpha}{2} - 1 \pm \sqrt{\left((m tg\frac{\alpha}{2} - 1)^2 - 4m tg^3\frac{\alpha}{2}\right)}\right]$$

und diese Formel kann nur dann Werthe für $\frac{\beta}{2}$ liefern, welche kleiner als 45° sind, wenn

$m\,tg\frac{\alpha}{2} > 1$; $\left(m\,tg\frac{\alpha}{2} - 1\right)^2 \geqq 4m\,tg^3\frac{\alpha}{2}$, und der Ausdruck für $tg\frac{\beta}{2}$ kleiner als 1 wird.

Aus der zweiten dieser drei Bedingungen folgt aber

28) $tg^2\frac{\alpha}{2}.m^2 - 2\,tg\frac{\alpha}{2}\left(1 + 2\,tg^2\frac{\alpha}{2}\right)m + 1 \geqq 0$ und wird erfüllt sowohl durch

29) $$m \geqq \frac{1}{tg\frac{\alpha}{2}}\left[1 + 2\,tg^2\frac{\alpha}{2} + 2\,tg\frac{\alpha}{2}\,sec\frac{\alpha}{2}\right] \text{ oder}$$

$$m \geqq \frac{2\left(1 + sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}{sin\,\alpha} \text{ oder auch}$$

$$m \geqq \frac{8\,cos^4\left(45 - \frac{\alpha}{4}\right)}{sin\,\alpha}, \text{ als auch durch}$$

30) $$m \leqq \frac{1}{tg\frac{\alpha}{2}}\left[1 + 2\,tg^2\frac{\alpha}{2} - 2\,tg\frac{\alpha}{2}\,sec\frac{\alpha}{2}\right] \text{ oder}$$

$$m \leqq \frac{2\left(1 - sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}{sin\,\alpha}, \text{ oder auch } m \leqq \frac{8\,sin^4\left(45 - \frac{\alpha}{4}\right)}{sin\,\alpha}$$ und es

schliesst die in 29) obige erste $m\,tg\frac{\alpha}{2} > 1$ schon in sich.

Die dritte Nothwendigkeit $tg\frac{\beta}{2} < 1$ liefert die Grenzbedingung

$$31)\quad m < \frac{1+tg\frac{\alpha}{2}}{tg\frac{\alpha}{2}\left(1-tg\frac{\alpha}{2}\right)} \quad \text{oder}$$

$$m < tg\left(45+\frac{\alpha}{2}\right).\,cotg\frac{\alpha}{2}$$

welche indessen, da $\dfrac{1+tg\frac{\alpha}{2}}{tg\frac{\alpha}{2}\left(1-tg\frac{\alpha}{2}\right)}$ für alle Werthe von α

allemal grösser als $\dfrac{1}{tg\frac{\alpha}{2}}\left(1+2tg^2\frac{\alpha}{2}-2tg\frac{\alpha}{2}\,sec\frac{\alpha}{2}\right)$ ist,

ebenfalls ausser Betrachtung fällt.

Von den beiden blos zu berücksichtigenden Grenzbestimmungen in 29) und 30), nämlich

$$m \geqq \frac{2\left(1+sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}{sin\,\alpha} \quad \text{und} \quad m \leqq \frac{2\left(1-sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}{sin\,\alpha}.$$

kann aber letztere nur in den Fällen in Anwendung kommen, wenn $\dfrac{2\left(1-sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}{sin\,\alpha}$ mehr als $3\sqrt{3}$ (vergl. II, 3)), also mindestens $3\sqrt{3}$ liefert. Die Gleichung

$$32)\quad \frac{2\left(1-sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}{sin\,\alpha}=3\sqrt{3} \quad \text{giebt aber die}$$

$$\left(1-sin\frac{\alpha}{2}\right)^3=27\,sin^2\frac{\alpha}{2}\left(1+sin\frac{\alpha}{2}\right), \quad \text{woraus}$$

$$\left(\frac{2}{7}+sin\frac{\alpha}{2}\right)^3-\frac{27}{4.7^2}\left(\frac{2}{7}+sin\frac{\alpha}{2}\right)-\frac{27}{4.7^3}=0$$

hervorgeht und nur

$$33)\quad sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{7}, \quad \text{also} \quad \alpha=16^0\,25'\,35'' \text{ liefert.}$$

Wird daher $\alpha < 16^0\,25'35''$ gewählt, so kann m sowohl der Bedingung 29) als auch der 30) entsprechende Werthe haben; für alle Winkel α aber, die grösser als $16^0\,25'\,35''$ sind, nur solche, wie sie die Bedingung in 29) ausdrückt.

VI. Die Grenzwerthe für α zu jedem Werth von m, von $m = 3\sqrt{3}$ bis $m = \infty$. Aus 29) folgt

34) $(m^2+1)\sin^3\frac{\alpha}{2} - (m^2-3)\sin^2\frac{\alpha}{2} + 3\sin\frac{\alpha}{2} + 1 \leqq 0$ und hieraus, ganz so wie in *IV* von 14) bis 26) bei derselben Bedeutung von $\cos\varphi$ wie in 24), dass in Beziehung auf das Zeichen $<$ und folgende zwei Ausdrücke:

$$\frac{m^2 - 3 + 2m\cos\frac{\varphi}{3}\cdot\sqrt{(m^2-15)}}{3(m^2+1)} \text{ und } \frac{m^2-3+2m\cos\left(240+\frac{\varphi}{3}\right)\cdot\sqrt{m^2-15}}{3(m^2+1)}$$

35) $\sin\frac{\alpha}{2}$ nur zwischen beiden genommen werden kann.

36) Dieselbe Bedingung geht ebenso aus 30) hervor, nur unter $\cos\varphi$ den Ausdruck $-\frac{m^4 - 36m^2 + 27}{m(m^2-15)^{\frac{3}{2}}}$ verstanden.

Die engeren dieser Grenzen sind in jedem speciellen Fall die entscheidenden; diejenigen, die α als stumpfen Winkel ergeben, fallen ausser Betracht.

VII. Beispiele.

1) Gegeben $\gamma = 90^0$; $\alpha = 40^0$; gesucht m.
Aus III. folgt nahe $m = 5{,}892$.

2) Gegeben $\gamma = 90^0$; $m = 10$; gesucht α.
Aus III. entsteht $\alpha = 14^0 47' 49''$ oder auch
$\alpha = 75\ 12' 11''$.

3) Gegeben $\alpha = \beta$; $\gamma = 20^0$; gesucht m.
Aus IV. ergiebt sich $m = 8{,}01778$..

4) Gegeben $\alpha = \beta$; $\gamma = 100^0$; gesucht m.
Aus IV. erhält man: $m = 6{,}33405$...

5) Gegeben $\alpha = \beta$; $m = 7$; gesucht γ.
Hier wird nach IV. $\varphi = 61^0\, 24'\, 52{,}92''$ und dann $\gamma = 25^0\, 0'\, 58''$
oder auch: $\gamma = 109^0 28' 34''$.

6) Gegeben $\alpha = \beta$; $m = 20$; gesucht γ.
Es entsteht nach IV. $\varphi = 15^0\, 26'\, 51''$ und $\gamma = 6^0\, 24'$ oder auch $156^0\, 56'$.

7) Gegeben $\alpha = 60^0$; gesucht die Grenzen für m.

Nach V. entsteht blos $m \geqq 3\sqrt{3}$.

8) Gegeben $\alpha = 12^0$; gesucht die Grenzen für m.

Es liefert V. 33) sowohl $m \geqq 11{,}73559$ als auch $m \leqq 7{,}71356$.

Wird

9) zu $\alpha = 12^0$; $m = 12$ gewählt, so ergeben sich nahe $\beta = 59^0$ und $\gamma = 109^0$. Wird

10) zu $\alpha = 12^0$; $m = 7$ angenommen, so kann kein Dreieck entsprechen, weil $m\, tg\, \frac{\alpha}{2} - 1$ negativ wird.

11) Gegeben $m = 10$; gesucht die Grenzen für α.

Nach VI. ergeben sich zu $\cos\varphi = \frac{m^4 - 36\, m^2 + 27}{m(m^2 - 15)^{\frac{3}{2}}}$ für α die Werthe: $132^0 44' 52''$ und $14^0 22' 17''$; zu $\cos\varphi = -\frac{m^4 - 36\, m^2 + 27}{m(m^2 - 15)^{\frac{3}{2}}}$ aber die beiden $92^0 50' 35''$ und $61^0 34' 40''$ und es sind daher $14^0 22' 17''$ und $61^0 34' 40''$ die verlangten Grenzwerthe. Wird

12) zu $m = 10$ zwischen den Grenzen $\alpha = 24^0$ genommen, so entsprechen $\beta = 23^0 15' 52''$ und $\gamma = 132^0 44' 8''$.

Dritte Aufgabe.

Der Inhalt eines Dreiecks soll sich zu dem des um dasselbe beschriebenen Kreises wie 1 zu n verhalten.

Zu bestimmen:

I. Die Gleichung zwischen α, β, γ und n.

Sie wird

1) $\frac{\pi}{n} = m$ gesetzt.

2) $m = 2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$.

II. Die Grenzwerthe für n.

Es wird $\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$ ein absolutes Maximum und zwar $= \frac{3}{8}\sqrt{3}$ für $\alpha = \beta = \gamma$ und der Grenzwerth für diess Produkt ist Null, woraus folgt, dass

3) n alle Werthe von $\frac{4}{9}\pi\sqrt{3}$ bis ∞ haben kann.

III. Die Vergleichung zwischen α und n, wenn $\gamma = 90^0$ werden soll. Es entsteht

4) $m = \frac{\pi}{n} = \sin 2\alpha$ und hieraus folgt, dass nur rechtwinklige Dreiecke entsprechen können von

5) $n > \pi$ bis $n = \infty$, also durchaus spitzwinklige von

6) $n = \frac{4}{9}\pi\sqrt{3}$ bis nahe $n = \pi$.

IV. Die Gleichung zwischen γ und n, wenn $\alpha = \beta$ werden soll.

Sie wird, $90 - \frac{\gamma}{2}$ für α und β gesetzt,

7) $m = 2\cos^2\frac{\gamma}{2}\sin\gamma$ oder $= (1 + \cos\gamma)\sin\gamma$ und liefert $n = \frac{4}{9}\pi\sqrt{3}$ als Minimum zu $\gamma = 60^0$ und $n = \infty$ zu $\gamma = 180^0$ als Grenzwerth, so dass also zu allen Werthen von n gleichschenklige Dreiecke existiren.

Soll aus 7) γ durch m ausgedrückt werden, so entsteht

8) $\sin^4\gamma - 2m\sin\gamma + m^2 = 0$, und diese Bestimmung wird identisch mit der

9) $[\sin^2\gamma + y\sin\gamma + u][\sin^2\gamma - y\sin\gamma + z] = 0$, wenn

10) $y^6 - 4m^2y^2 - 4m^2 = 0$;

11) $u = \frac{y^3 + 2m}{2y}$ und

12) $z = \frac{y^3 - 2m}{2y}$ ist.

Es entspricht aber der Gleichung 10) nur ein reeller Werth für y^2 und dieser ist, wenn

13) $2m^2[1 + \sqrt{(1 - \frac{16}{27}m^2)}]$ durch δ^3 und

14) $2m^2[1 - \sqrt{(1 - \frac{16}{27}m^2)}]$ durch d^3 ausgedrückt wird,

15) $y^2 = \delta + d$.

Wählt man den positiven Werth für y, so wird der erste Faktor in 9) für alle reellen Werthe von $\sin\gamma$ immer positiv, indem derselbe nur für imaginäre Werthe von $\sin\gamma$ zu Null wird, und die Bedingung in 8) und 9) reducirt sich demnach auf folgende:

16) $\sin^2\gamma - y\sin\gamma + z = 0$ und giebt

17) $\sin\gamma = \frac{1}{2}\left[y \pm \sqrt{\left(\frac{4m}{y} - y^2\right)}\right]$, oder

18) $1+\delta+d$ durch b^6 ausgedrückt

19) $\sin\gamma=\frac{b^2\pm\sqrt{(2b-b^4)}}{2b}.\sqrt[3]{2m}$.

In dem besondern Falle, wenn $n=\pi$, also $m=1$ ist, wird

20) $(1-\sin\gamma)(\sin^3\gamma+\sin^2\gamma+\sin\gamma-1)=0$ aus 7) und giebt

21) $\gamma=90^0$, sowie auch $\gamma=32^0 56' 6''$ als einzigen reellen Werth aus $\sin^3\gamma+\sin^2\gamma+\sin\gamma-1=0$.

V. Die Relation zwischen α und n, damit entsprechende Werthe für β und γ existiren.

Es entsteht aus 2), wenn $\sin(\alpha+\beta)$ für $\sin\gamma$ gesetzt wird:

22) $\cos(\alpha+2\beta)=\frac{\sin\alpha\cos\alpha-m}{\sin\alpha}$ oder $\cos\alpha-m\ \mathrm{cosec}\,\alpha$ und hieraus folgt die Bedingung:

23) $\left(\frac{\cos\alpha\sin\alpha-m}{\sin\alpha}\right)^2\leqq 1$, woraus

23) $n\geqq\frac{\pi}{\sin\alpha\,(1+\cos\alpha)}$ oder $\frac{\pi}{2\sin\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}}$ folgt, und zu jedem für α gewählten Werth den Grenzwerth für n, der Bestimmung in 3) entsprechend, liefert.

Sollen umgekehrt zu jedem angenommenen Werth von n die Grenzwerthe für α ermittelt werden, so folgt

25) für den besondern Fall $n=\pi$; $\alpha\geqq 32^0 56' 6''$ und für alle übrigen Werthe von n die Bestimmung

26) $\sin^4\alpha-2m\sin\alpha+m^2\leqq 0$, woraus, ganz wie in IV. bei derselben Bedeutung von δ, d und b, sich

27) $\frac{b^2\mp\sqrt{(2b-b^4)}}{2b}.\sqrt[3]{2m}$ als die beiden Grenzwerthe für $\sin\alpha$ ergeben. Sie selbst liefern $\beta=\gamma$; Zwischenwerthe aber geben β und γ verschieden.

VI. Beispiele.

1) Gegeben $\gamma=90^0$ und $\alpha=30^0$; gesucht n.

$$n=\tfrac{2}{3}\pi.\sqrt{3}.$$

2) Gegeben $\gamma=90^0$; $n=3\pi$; gesucht α.

$$\sin 2\alpha=\tfrac{1}{3};\ \alpha=9^0 44' 8''; \text{ oder } 80^0 15' 52''.$$

3) Gegeben $\alpha=\beta$; $\gamma=40^0$; gesucht n.

$$n=0{,}8809086.\pi.$$

4) Gegeben $\alpha=\beta$; $\gamma=150^0$; gesucht n.

$$n=14{,}92821.\pi.$$

5) Gegeben $\alpha=\beta$; $n=\frac{43}{54}\pi$; gesucht γ.

Es folgt $\delta=\frac{54}{43}\sqrt[3]{2}$; $d=\frac{36}{43}\sqrt[3]{4}$; $b^6=3{,}9112126$ und von den vier Winkeln, welche sich ergeben, genügen der Gleichung 2) nur die beiden: $\gamma=49^0\,40'\,59''$ und auch $\gamma=70^0\,41'\,27''$.

6) Gegeben $\alpha=\beta$; $n=\dfrac{109\,\pi}{27}$; gesucht γ.

Es entsteht $\delta=\frac{54}{109}\sqrt[3]{2}$; $d=\frac{9}{109}\sqrt[3]{4}$; $b^6=1{,}755251$ und für γ genügt von den vier sich ergebenden Winkeln der Bedingung in 2) nur der $7^0\,10'\,12''$.

7) Gegeben $\alpha=50^0$; gesucht der Grenzwerth von n.

$$n \geqq 0{,}79463.\pi.$$

8) Gegeben $\alpha=50^0$; $n=\pi$ (nach 7)); gesucht β, γ.

$$\beta=40^0 45'; \ \gamma=89^0 15'.$$

9) Gegeben $n=\pi$; gesucht die Grenzwerthe für α.

Es entsteht $\delta=1{,}485274$; $d=0{,}897701$; $y=1{,}543688$ und die Grenzwerthe von α werden $32^0 56' 6''$ und 90^0 (wie in 21)).

10) Gegeben $n=\pi$; $\alpha=60^0$ (nach 9)); gesucht β, γ.

$$\beta=35^0\,26'\,54\tfrac{1}{2}''$$
$$\gamma=84^0\,33'\,\ 5\tfrac{1}{2}''.$$

Vierte Aufgabe.

Die Summe der Peripherien der vier die Seiten desselben Dreiecks tangentirenden Kreise soll sich zu der Peripherie des um dieses Dreieck beschriebenen Kreises wie n zu 1 verhalten.

Zu bestimmen:

I. Die Gleichung zwischen α, β, γ und n.

Es sind $\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} : \cos\frac{\alpha}{2}$; $\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} : \sin\frac{\alpha}{2}$;

$\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} : \sin\frac{\alpha}{2}$ und $\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} : \cos\frac{\alpha}{2}$ die Halbmesser der vier tangentirenden Kreise und es entsteht die Bedingungsgleichung

1) $n = 2[1 + \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma]$ oder auch

2) $n = 4\left[1 + 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right]$.

II. Die Grenzen für n.

Wird $-\cos(\alpha+\beta)$ für $\cos\gamma$ in 1) gesetzt, so geben die Ableitungen nach α und nach β

3) $n = 5$ als absolutes Maximum zu $\alpha = \beta = \gamma$.

Als Grenzwerth ergiebt sich $n = 4$, so dass also

4) zu allen Werthen von n, die grösser als 4 und höchstens $= 5$ sind, Dreiecke von der verlangten Eigenschaft existiren.

III. Die Abhängigkeit der Werthe für α und n von einander, wenn $\gamma = 90^0$ werden soll.

Es entsteht

5) $n = 2.(1 + \sin\alpha + \cos\alpha)$ und hieraus auch

6) $\cos\alpha = \frac{1}{4}[n - 2 \pm \sqrt{(4 + 4n - n^2)}]$.

Es folgt aus diesen Formeln, dass $2 + 2\sqrt{2}$ der höchste Werth für n zu $\gamma = 90^0$ ist, dass also nur von $n > 4$ bis $n = 2 + 2\sqrt{2}$ rechtwinklige Dreiecke entsprechen können.

IV. Die Gleichung zwischen γ und n für gleichschenklige Dreiecke, also für $\alpha = \beta$.

Wird in 2) sowohl für α als für β $90 - \frac{\gamma}{2}$ gesetzt, so folgt

7) $n = 4 + 4\left(1 - \sin\frac{\gamma}{2}\right)\sin\frac{\gamma}{2}$ oder auch

8) $n = 4 + 8\sin^2\left(45 - \frac{\gamma}{4}\right)\sin\frac{\gamma}{2}$, sowie

9) $\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}\left[1 \pm \sqrt{(5 - n)}\right]$.

Diesen Formeln entsprechend existiren daher der Forderung genügende gleichschenklige Dreiecke für alle Werthe von n von $n > 4$ bis $n = 5$.

V. Die allgemeine Abhängigkeit zwischen α und n, damit zugehörige Werthe für β und γ existiren.

Es entspringt aus 2)

$$10)\ \sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right) = \frac{n-4\cos^2\frac{\alpha}{2}}{4\sin\frac{\alpha}{2}}$$

und dieser Bedingung entsprechen nur dann Werthe für β, wenn

11) $\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right) > \sin\frac{\alpha}{2}$ und

12) $\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right) \leqq 1$ ist; die erste giebt

13) $n > 4$; die zweite

14) $n \leqq 4\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)$.

Erstere ist schon in 4) ausgesprochen, und letztere giebt

15) $\sin\frac{\alpha}{2} \geqq \frac{1}{2}[1-\sqrt{(5-n)}]$ und

16) $\sin\frac{\alpha}{2} \leqq \frac{1}{2}[1+\sqrt{(5-n)}]$.

VI. Beispiele.

1) Gegeben $\gamma=90^0$; $\alpha=32^0$; gesucht n.
$n=4{,}7559348$.

2) Gegeben $\gamma=90^0$; $n=4\frac{1}{2}$; gesucht α.
$\alpha=17^0 6' 52''$.

3) Gegeben $\alpha=\beta$; $\gamma=40^0$; gesucht n.
$n=4{,}9001694$.

4) Gegeben $\alpha=\beta$; $\gamma=160$; gesucht n.
$n=4{,}0598458$.

5) Gegeben $\alpha=\beta$; $n=4\frac{3}{4}$; gesucht γ.
$\gamma=28^0 57' 18''$; auch $97^0 10' 50''$.

6) Gegeben $\alpha=\beta$; $n=4\frac{49}{625}$; gesucht γ.
$\gamma=23^0 4' 26''$; auch $157^0 2' 36''$.

7) Gegeben $\alpha=50^0$; gesucht der Grenzwerth für n.
$n \leqq 4{,}9760484$.

8) Gegeben $\alpha=50^0$; $n=4{,}8$; gesucht β und γ.
$\beta=38^0 37' 8''$; $\gamma=91^0 22' 52''$.

9) Gegeben $n=4{,}19$; gesucht den Grenzwerth für α.

$$\alpha \geqq 5^{0}\,43'\,55''.$$

10) Gegeben $n=4{,}19$; $\alpha=8^{0}$; gesucht β, γ.

$$\beta=20^{0}21';\ \gamma=151^{0}39'.$$

Fünfte Aufgabe.

Die Summe der Inhalte der vier die Seiten desselben Dreiecks tangentirenden Kreise soll sich zum Inhalt des um dieses Dreieck beschriebenen Kreises wie n zu 1 verhalten.

Zu bestimmen:

I. Die Gleichung zwischen α, β, γ und n.

Sie ergiebt sich

$$\left(\frac{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right)^2+\left(\frac{\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2+\left(\frac{\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2+\left(\frac{\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right)^2$$

$$=n\left(\frac{1}{2\sin\alpha}\right)^2$$

und reducirt sich auf

1) $n=8(1-\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)$.

II. Die Grenzen für n.

Es ergiebt sich

2) $n=7$ als absolutes Minimum zu $\alpha=\beta=\gamma$ und

3) $n=16$ als Grenzwerth.

III. Die Vergleichung zwischen α und n, wenn $\gamma=90^{0}$ sein soll.

Es muss für jeden Werth von α allemal

4) $n=8$ sein.

IV. Die Vergleichung zwischen γ und n, wenn $\alpha=\beta$ werden soll.

Es entsteht

5) $n=8\left(1-\sin^2\frac{\gamma}{2}\cos\gamma\right)$ und hieraus

6) $\cos\gamma=\frac{1}{2}[1\pm\sqrt{(n-7)}]$, woraus hervorgeht, dass

7) von $n=7$ bis $n<16$ zu jedem Werthe von γ gleichschenklige entsprechende Dreiecke existiren, und zwar zu $n=7$ bis $n<8$

zwei spitzwinklige, zu $n=8$ ein rechtwinkliges und zu $n>8$ bis $n<16$ ein stumpfwinkliges.

V. Für welche Abhängigkeit zwischen α und n überhaupt Werthe für β stattfinden können.

Es folgt aus 1), wenn $-\cos(\alpha+\beta)$ für $\cos\gamma$ gesetzt wird:

8) $\cos(\alpha+2\beta)=\frac{n-8-4\cos^2\alpha}{4\cos\alpha}$ und hieraus auch

9) $\cos(\alpha+2\beta)+\cos\alpha=2\cos(\alpha+\beta)\cos\beta=\frac{n-8}{4\cos\alpha}$.

Aus 9) geht hervor, dass

10) für alle Werthe für n von $n=7$ bis $n<8$; $\cos(\alpha+\beta)$ negativ, also $\alpha+\beta>90^0$ und $\gamma<90^0$;

11) für $n=8$; $\cos(\alpha+\beta)=0$; also $\alpha+\beta=90^0$ und $\gamma=90^0$;

12) für alle Werthe von n, von $n>8$ bis $n<16$; $\cos(\alpha+\beta)$ positiv, also $\alpha+\beta<90^0$ und daher $\gamma>90^0$ werden muss, und diesen Bedingungen entsprechend sollen nun die jedesmaligen Grenz-Werthe von n durch α und von α durch n ausgedrückt werden. Es folgt

13) zu $n=7$ für α der bestimmte Werth 60^0 nach 2);

14) zu $n>7$ und $n<8$, dass $\frac{n-8-4\cos^2\alpha}{4\cos\alpha}$ negativ wird, also nur Werthe für β sich ergeben, wenn $\frac{8+4\cos^2\alpha-n}{4\cos\alpha}<1$ wird, woraus

$n>8+4\cos^2\alpha-4\cos\alpha$ und die Bestimmung folgt, dass $\cos\alpha$ nur zwischen $\frac{1}{2}[1+\sqrt{(n-7)}]$ und $\frac{1}{2}[1-\sqrt{(n-7)}]$ genommen werden kann.

15) zu $n=8$, dass α jeden Werth von $\alpha>0$ bis $\alpha<90^0$ annehmen kann.

16) zu $n>8$ und $n<16$, dass der absolute Werth von $\frac{n-8-4\cos^2\alpha}{4\cos\alpha}$ kleiner als $\cos\alpha$ hervorgehen muss, wenn sich β positiv ergeben soll, woraus

$$n<8+8\cos^2\alpha \text{ und also}$$

$$\cos\alpha>\sqrt{\frac{n-8}{8}} \text{ folgt.}$$

Zu allen, diesen Festsetzungen entsprechenden zusammengehörigen Werthen von α und n, bestimmt sich dann β aus 8, und γ aus $\alpha+\beta+\gamma=180^0$.

VI. Beispiele.

1) Gegeben $\alpha=\beta$; $\gamma=40^0$; gesucht n.

$$n=7{,}2831184.$$

2) Gegeben $\alpha=\beta$; $\gamma=120^0$; gesucht n.

$$n=11.$$

3) Gegeben $\alpha=\beta$; $n=7\frac{1}{4}$; gesucht γ.

$\gamma=41^0 24' 35''$ und auch $\gamma=75^0 31' 21''$.

4) Gegeben $\alpha=\beta$; $n=7{,}81$; gesucht γ.

$\gamma=18^0 11' 42''$; auch $\gamma=87^0 8' 3''$.

5) Gegeben $\alpha=30^0$; gesucht die Grenzwerthe von n.

$n>11-2\sqrt{3}$ und $n<14$.

6) Gegeben $\alpha=30^0$ und 5) entsprechend $n=7\frac{2}{3}$; gesucht β.

$$\beta=67^0 6' 12''.$$

7) Gegeben $n=7\frac{9}{16}$; gesucht die Grenzen für α.

Zwischen $\alpha=28^0 57' 18''$ und $\alpha=82^0 49' 18''$.

8) Gegeben $n=7\frac{9}{16}$ und 7) entsprechend, $\alpha=60^0$; gesucht β.

$$\beta=37^0 58' 32''.$$

9) Gegeben $\alpha=60^0$; gesucht die Grenzwerthe für n.

$n>7$ und $n<10$.

10) Gegeben $\alpha=60^0$ und 9) entsprechend, $n=9$; gesucht β.

$$\beta=15^0.$$

Sechste Aufgabe.

Die Summe der Inhalte der drei die Seiten eines Dreiecks ausserhalb berührenden Kreise soll sich zu dem Inhalt des um dieses Dreieck beschriebenen Kreises wie n zu 1 verhalten. Zu bestimmen:

I. Die Gleichung zwischen α, β, γ und n.

Sie ist

$$\left(\frac{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right)^2+\left(\frac{\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2+\left(\frac{\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2=n\,\frac{1}{(2\sin\alpha)^2}$$

und reducirt sich auf

1) $n = 2[3 + \cos\alpha + \cos\beta$
$+ \cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma - \cos\beta\cos\gamma - 3\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma]$.

II. Die Grenzwerthe von n:

Wird in 1) $-\cos(\alpha+\beta)$ für $\cos\gamma$ oder $-\cos(\alpha+\gamma)$ für $\cos\beta$ gesetzt, so ergeben sich für die ersten Ableitungen Produkte, in welchen im ersten Fall $\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$, im letzteren aber $\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}$ als Faktor erscheint, und die Fortsetzung des Calcüls liefert

2) $n = \frac{27}{4}$ als absolutes Minimum zu $\alpha = \beta = \gamma$.

Als Grenzwerth ergiebt sich unmittelbar

3) $n = 16$.

III. Die Vergleichung zwischen α und n, wenn das Dreieck rechtwinklich sein soll.

Es entsteht, 90^0 für γ und $90 - \alpha$ für β gesetzt, aus 1)

4) $n = 2[3 + \sin\alpha + \cos\alpha - \sin\alpha\cos\alpha]$, woraus sich ergiebt

5) $n = 5 + 2\sqrt{2}$ als Minimum zu $\alpha = 45^0$, und

6) $n = 8$ als Grenzwerth sowohl zu $\alpha = 0$ als auch zu $\alpha = 90^0$.

Wird zu Werthen von n zwischen den beiden Grenzen in 5) und 6) und zu $\gamma = 90^0$ der entsprechende Werth von α gesucht, so ergiebt sich, $\sqrt{2}\sin(45+\alpha)$ für $\sin\alpha + \cos\alpha$ und $\frac{1}{2} - \sin^2(45+\alpha)$ für $-\sin\alpha\cos\alpha$ gesetzt,

7) $2\sin^2(45+\alpha) - 2\sqrt{2}\sin(45+\alpha) + n - 7 = 0$, woraus α sich bestimmt.

IV. Die Gleichung zwischen γ und n, wenn das Dreieck ein gleichschenkliges werden soll und γ der von den gleichen Seiten eingeschlossene Winkel.

Wird für α und β in 1) $90 - \frac{\gamma}{2}$ gesetzt, so folgt

8) $n = 4\left(2 - 3\sin^2\frac{\gamma}{2} + 2\sin^3\frac{\gamma}{2}\right.$ [illegible] $\left.\sin^4\frac{\gamma}{2}\right)$ oder auch

$$= 4\left(1 + \sin\frac{\gamma}{2}\right)\left(2 - 2\sin\frac{\gamma}{2} - \sin^2\frac{\gamma}{2} + 3\sin^3\frac{\gamma}{2}\right)$$

und hieraus

9) $n = \frac{27}{4}$ als Minimum zu $\gamma = 60^0$ und

10) als Grenzwerthe: $n = 8$ zu $\gamma = 0$ und $n = 16$ zu $\gamma = 180^0$.

Soll zu jedem gewählten Werth von n zwischen den Grenzen $6\frac{3}{4}$ und 16 der entsprechende Werth von γ ermittelt werden, so folgt, wenn $n = 8$ ist, sehr einfach

11) ausser $\gamma = 0$ auch noch $sin\,\frac{\gamma}{2} = \frac{-1+\sqrt{10}}{3}$; also $\gamma = 92^0 14' 2''$.

Für alle übrigen Werthe von n entspringt zur Bestimmung von γ aus 8) die Gleichung

$$12)\quad cosec^4\frac{\gamma}{2} - \frac{12}{8-n}\,cosec^2\frac{\gamma}{2} + \frac{8}{8-n}\,cosec\frac{\gamma}{2} + \frac{12}{8-n} = 0$$

und diese wird identisch mit der

$$13)\quad \left(cosec^2\frac{\gamma}{2} + y\,cosec\frac{\gamma}{2} + u\right)\left(cosec^2\frac{\gamma}{2} - y\,cosec\frac{\gamma}{2} + z\right) = 0,$$

wenn

$$14)\quad \left(y^2 - \frac{8}{8-n}\right)^3 - \frac{48(9-n)}{(8-n)^2}\left(y^2 - \frac{8}{8-n}\right) - \frac{64(54-7n)}{(8-n)^3} = 0,$$

$$15)\quad u = \tfrac{1}{2}\left(y^2 - \frac{12}{8-n} - \frac{8}{(8-n)\,y}\right) \text{ und}$$

$$16)\quad z = \tfrac{1}{2}\left(y^2 - \frac{12}{8-n} + \frac{8}{(8-n)\,y}\right) \text{ ist.}$$

Aus letzteren fünf Gleichungen bestimmt sich zu jedem Werth von n zwischen $6\frac{3}{4}$ und 8 und zwischen 8 und 16 der entsprechende Werth von γ. Zwischen den ersteren beiden Grenzen tritt im Allgemeinen für die Lösung der Gleichung 14) der irreduktible Fall ein; liegt aber n zwischen 8 und 16, so findet die Cardanische Formel Anwendung.

V. Die Abhängigkeit zwischen n und α im Allgemeinen, wenn überhaupt der Gleichung 1), einem Dreieck angehörige Werthe, für die beiden andern Winkel entsprechen können.

Wird, wie in II., γ eliminirt, so entsteht nach Anwendung der Gesetze: $2\cos x \cos y = \cos(x-y) + \cos(x+y)$ und $\cos x - \cos y = 2\sin\frac{x+y}{2}\,.\,\sin\frac{y-x}{2}$ für $\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)$ eine unreine quadratische Gleichung, und aus ihr folgt

$$17)\quad \sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)$$

$$= \frac{1}{(1+3\cos\alpha)\sqrt{2}}\left[(1-\cos\alpha)^{\frac{3}{2}} \pm \sqrt{[8(1+\cos\alpha)^3 - (1+3\cos\alpha)\,n]}\right]$$

worinnen auch $2\sqrt{2}\,sin^3\frac{\alpha}{2}$ für $(1-\cos\alpha)^{\frac{3}{2}}$ und

$$64\cos^6\frac{\alpha}{2} \text{ für } (1+\cos\alpha)^3$$

gesetzt werden kann.

Aus dieser Formel geht hervor, dass sie nur Reelles liefert, wenn

18) $n \leqq \frac{8(1+\cos\alpha)^3}{1+3\cos\alpha}$ ist, ferner weil

$\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right) > \sin\frac{\alpha}{2}$ entstehen muss, dass auch

19) $n < 8(1+\cos^2\alpha)$ sein muss; dann, weil $\frac{\alpha}{2}+\beta$ nie den dritten Quadranten erreichen kann, dass $(1-\cos\alpha)^{\frac{3}{2}}$ nie kleiner als $\sqrt{[8(1+\cos\alpha)^3-(1+3\cos\alpha)n]}$ werden darf, woraus

20) $n \geqq 7+6\cos\alpha+3\cos^2\alpha$ folgt; endlich, da der Ausdruck für $\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)$ nie Eins überschreiten darf, noch die nothwendige Bedingung

21) $n \geqq 5+3\cos^2\alpha+8\sin^3\frac{\alpha}{2}$.

In jedem besondern Falle sind die engeren Grenzen zu nehmen, wenn nicht die eine die andere schon in sich schliesst oder auf imaginäre Formen führt, wozu die Untersuchung in VI. die nähere Bestimmung giebt.

VI. In welchen Fällen von den Grenzen in 18) und 19) die eine oder die andere in Anwendung kommt.

Beide werden gleich, sowohl wenn $\alpha=0$, als auch wenn $\alpha=90^\circ$ ist; in allen Zwischenfällen ist die in 18) die grössere, indem $1>\cos\alpha$ ist, und es ist daher nur die

$$n \leqq 8(1+\cos^2\alpha)$$

zu berücksichtigen und die in 18) fällt ausser Betracht, die Fälle ausgeschlossen, wenn n zwischen $6\frac{3}{4}$ und 8 gewählt wird, indem dann kein entsprechender Werth für α existirt, die Bedingung also keinen Grenzwerth liefert. In allen diesen Fällen kommt die Bestimmung

$$n \leqq \frac{8(1+\cos\alpha)^3}{1+3\cos\alpha},$$

welche nur Werthe von $n=8$ bis $n=16$ giebt, in Anwendung.

VII. In welchen Fällen von den Grenzen in 20) und 21) die eine oder die andere in Anwendung kommt?

Beide geben denselben Winkel α, und zwar den aus der Gleichung

22) $\operatorname{cosec}^3\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{2}\operatorname{cosec}\frac{\alpha}{2}-1=0$ hervorgehenden, welcher zu

23) $\operatorname{cosec}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{(4+2\sqrt{2})}+\sqrt[3]{(4+2\sqrt{2})}\right)$ den Werth

$\alpha=85^0\,19'14''$ giebt.

Zu allen Werthen von α, von $\alpha>0$ bis $\alpha<85^0\,19'14''$ giebt 21), zu den übrigen von $\alpha>85^0\,19'14''$ bis $\alpha=90^0$ giebt 20) die Grenzbestimmung.

VIII. Die Grenzen für die Werthe von α, durch n ausgedrückt, den vier Bedingungen in 18) bis 21) entsprechend.

Aus 18) folgt

24) $(1+\cos\alpha)^3-\frac{3n}{8}(1+\cos\alpha)+\frac{n}{4}\geqq 0$ und dieser Ausdruck zerlegt sich, wenn

25) φ den ersten der Winkel bezeichnet, für welchen $\cos\varphi=-\sqrt{\frac{8}{n}}$ ist, in folgende drei Faktoren:

26) $1+\cos\alpha-\sqrt{\frac{n}{2}}\cos\frac{\varphi}{3}$; $1+\cos-\sqrt{\frac{n}{2}}\cos\left(120^0+\frac{\varphi}{3}\right)$ und

$1+\cos\alpha-\sqrt{\frac{n}{2}}\cos\left(240^0+\frac{\varphi}{3}\right)$.

Weil nun von den hier nur in Betracht kommenden Grenzwerthen für n, von $n=8$ bis $n=16$, der Winkel φ alle Werthe von 180^0 bis 135^0, folglich der $120^0+\frac{\varphi}{3}$ in stetiger Aufeinanderfolge alle von 180^0 bis 165 durchläuft, so wird der zweite dieser drei Faktoren immer positiv, und es ergiebt sich die Bedingung, dass

27) zu allen Werthen für n zwischen 8 und 16 der Winkel α zwi-

schen denen genommen werden muss, deren Cosinusse $= -1 + \sqrt{\frac{n}{2}} \cos\frac{\varphi}{3}$ und $= -1 + \sqrt{\frac{n}{2}} \cos\left(240^0 + \frac{\varphi}{3}\right)$ sind.

Aus 19) folgt

28) $\cos\alpha > \sqrt{\frac{n-8}{8}}$ für alle Werthe für n, von $n > 8$ bis $n < 16$. (Vergl. VI.)

Aus 20) ergiebt sich

$$\left(\cos\alpha + 1 + \sqrt{\frac{n-4}{3}}\right)\left(\cos\alpha + 1 - \sqrt{\frac{n-4}{3}}\right) \leqq 0, \text{ woraus}$$

29) $\cos\alpha \leqq -1 + \sqrt{\frac{n-4}{3}}$ hervorgehet, aber nur massgebend ist, wenn der Ausdruck reell wird und das Zeichen $=$ für α weniger als 90^0 liefert. In solchen Ausnahmefällen kommt die Bestimmung 21) in Anwendung.

Aus 21) folgt, wenn $1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$ für $\cos\alpha$ gesetzt und dann $cosec$ für $\frac{1}{\sin}$ eingeführt wird, die Bestimmung:

30) $\operatorname{cosec}^4\frac{\alpha}{2} - \frac{12}{8-n}\operatorname{cosec}^2\frac{\alpha}{2} + \frac{8}{8-n}\operatorname{cosec}\frac{\alpha}{2} + \frac{12}{8-n} \leqq 0$, und aus ihr sind die Grenzen für α ebenso wie in IV. aus 12) bis 16) für y in jedem speciellen Fall zu entnehmen.

In den beiden besonderen Fällen, wenn $n = \frac{54}{7}$ und auch, wenn $n = 9$ ist, wird die Untersuchung vereinfacht.

Es ergiebt sich nämlich:

Erstens zu $n = \frac{54}{7}$; aus 14)

31) $y = +2\sqrt{7}$ als einer der sechs Werthe, welche dieser Gleichung 14) genügen, und zu diesem dann $u = -7 - \sqrt{7}$; $z = -7 + \sqrt{7}$. Für diese zusammengehörigen Werthe zerfällt aber der Ausdruck in 12) in die vier Faktoren

32) $\operatorname{cosec}\frac{\alpha}{2} + \sqrt{7} + \sqrt{(14 + \sqrt{7})}$; $\operatorname{cosec}\frac{\alpha}{2} + \sqrt{7} - \sqrt{(14 + \sqrt{7})}$;

$\operatorname{cosec}\frac{\alpha}{2} - \sqrt{7} + \sqrt{(14 - \sqrt{7})}$; $\operatorname{cosec}\frac{\alpha}{2} - \sqrt{7} - \sqrt{(14 - \sqrt{7})}$

und da der erste und dritte immer Positives ergeben, so folgen

33) $-\sqrt{7}+\sqrt{(14+\sqrt{7})}$ und $+\sqrt{7}+\sqrt{(14-\sqrt{7})}$ als die Grenzwerthe für $cosec\,\frac{\alpha}{2}$ zu $n=\frac{54}{7}$.

Zweitens zu $n=9$

34) $y^2=4\,(-2+\sqrt[3]{9})$, woraus, wenn

35) $+\sqrt{(-2+\sqrt[3]{9})}$ durch b ausgedrückt wird, sich die Grenzen

36) $b-\sqrt{\left(-4-\sqrt[3]{9}+\frac{2}{b}\right)}$ und $b+\sqrt{\left(-4-\sqrt[3]{9}+\frac{2}{b}\right)}$ für $cosec\,\frac{\alpha}{2}$ ergeben, von welchen aber, weil erstere α als stumpfen Winkel liefert, nur letztere bestimmend ist.

IX. Beispiele.

1) Gegeben $\gamma=90^0$; $\alpha=30^0$; gesucht n.

Es folgt aus III. $n=7+\frac{1}{2}\sqrt{3}=7{,}8660254..$

2) Gegeben $\gamma=90^0$; $n=7{,}9$; gesucht α.

Aus III. 7) ergiebt sich: $\alpha=23^0 32' 47''$.

3) Gegeben $\alpha=\beta$; $\gamma=36^0$; gesucht n.

Aus IV. entsteht: $n=\frac{29\sqrt{5}-9}{8}=6{,}9807465..$

4) Gegeben $\alpha=\beta$; $\gamma=120^0$; gesucht n.

Aus IV. folgt $n=\frac{23+12\sqrt{3}}{4}=10{,}9461524...$

5) Gegeben $\alpha=\beta$; $n=7$; gesucht γ.

Aus IV. erhält man:

$(y^2-8)^3-96\,(y^2-8)-320=0$; $\cos\varphi=\frac{5\sqrt{2}}{8}$ gesetzt, $\varphi=27^0 53' 8''$, dann einen der sechs Werthe für $y=\sqrt{(8+8\sqrt{2}\cos 9^0 17' 42\frac{2}{3}'')}=4{,}3778$; ferner $u=2{,}93887$; $z=4{,}49627$; und die Faktoren in 13) werden:

$$cosec^2\frac{\gamma}{2}+4{,}3778\,cosec\frac{\gamma}{2}+2{,}93887 \text{ und}$$

$$cosec^2\frac{\gamma}{2}-4{,}3778\,cosec\frac{\gamma}{2}+4{,}49627.$$

Nur $cosec\,\frac{\gamma}{2}=2{,}73205$ kann genügen und giebt $\gamma=42^0 56'$.

6) Gegeben $\alpha=\beta$; $n=12$; gesucht γ.

Es folgt aus IV.

$(y^2+2)^2+9(y^2+2)-30=0$; hieraus $y^2=0,18085$;

$y=0,42526$; $u=3,94193$; $z=-0,76108$;

die Faktoren in 13) werden:

$$cosec^2\frac{\gamma}{2}+0,42526\,cosec\frac{\gamma}{2}+3,94193 \text{ und}$$

$$cosec^2\frac{\gamma}{2}-0,42526\,cosec\frac{\gamma}{2}-0,76108.$$

Es genügt nur $cosec\frac{\gamma}{2}=1,11057$ und giebt $\gamma=128°26$.

7) Gegeben $\alpha=60°$; gesucht die Grenzwerthe für n und für einen Zwischenwerth die für β und γ.

Aus V. und VI. finden sich hier $6\frac{3}{4}$ und 10 als die Grenzen für n und wird nun $n=9$ angenommen, so folgt $sin(30+\beta)=0,7$; also $\beta=14°25'37$ und dann $\gamma=105°34'32''$.

8) Gegeben $\alpha=87°$; gesucht die Grenzen für n und für einen Zwischenwerth die entsprechenden Werthe für β und γ.

Nach VI. und VII. sind hier 7,322233 und 8,0219 die Grenzwerthe für n und wird $n=7,7$ gewählt, so giebt 17) für β und γ die Winkel von $11°16'3''$ und $81°43'57''$.

9) Gegeben $n=7$; gesucht die Grenzen für α und für einen Zwischenwerth die entsprechenden für β und γ.

Es folgt ganz wie im Beispiel 5, dass $\alpha>42°56'$ zu nehmen ist. Wird $\alpha=60°$ zu $n=7$ angenommen, so ergeben sich die beiden andern Winkel $=46°21'$ und $73°39'$.

10) Gegeben $n=15$; gesucht die Grenzen für α und einem Zwischenwerth entsprechend, die zugehörigen Werthe für β und γ.

Es ergiebt sich $\alpha<23°47'$.

Wird zu $n=15$; $\alpha=20°$ gewählt, so folgt $\beta=1°21$; $\gamma=158°39'$.

Siebente Aufgabe.

Die Summe der Flächenräume der vier die Seiten desselben Dreiecks tangentirenden Kreise und der des um dieses Dreieck beschriebenen Kreises soll einer gegebenen Zahl $p=m\pi$ gleich werden. Zu bestimmen:

I. Die Gleichung zwischen α, β, γ und m.

Sie reducirt sich auf

1) $4m\sin^2\alpha = 9 - 8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.

II. Die Grenzen für m.

Aus $dm_\beta = 0$ folgt $\alpha + 2\beta = 180^0$ und wird diese Bedingung in $dm_\alpha = 0$ aufgenommen, so entsteht

2) $(\cos\alpha - \frac{1}{4})^3 - \frac{29}{16}(\cos\alpha - \frac{1}{4}) - \frac{3}{16} = 0$, woraus für $\cos\alpha$ folgende drei Ausdrücke sich ergeben:

3) $\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{29}{12}}\cos 26^0\, 9'\, 41\frac{1}{3}''$; $\frac{1}{4} - \sqrt{\frac{29}{12}}\cos 33^0\, 50'\, 18\frac{2}{3}''$ und $\frac{1}{4} - \sqrt{\frac{29}{12}}\cos 86^0\, 9'\, 41\frac{1}{3}''$.

Nur der letztere kann genügen und giebt

4) $\alpha = 81^0 36' 32''$, für welchen Winkel

5) $m = 2{,}17161$ ein absolutes Minimum wird.

Als Grenzwerth folgt unmittelbar aus 1)

6) $m = \infty$.

Zu bemerken ist hierbei in Beziehung auf 5), dass für $\alpha = \beta = \gamma$ sich $m = 2\frac{2}{3}$, also nicht als ein Minimum herausstellt, wie diess in den vorhergehenden Aufgaben der Fall war.

III. Die Vergleichuung zwischen α und m, wenn $\gamma = 90^0$ sein soll.

Es entsteht aus 1)

7) $4m\sin^2\alpha = 9$, woraus folgt, dass nur

8) zu $m > 2\frac{1}{4}$ rechtwinklige Dreiecke entsprechen können.

IV. Die Vergleichung zwischen γ und m, wenn $\alpha = \beta$ werden soll.

Wird $90 - \frac{\gamma}{2}$ sowohl für α als für β in 1) gesetzt, so folgt

9) $m = \frac{9 - 4\cos\gamma + 4\cos^2\gamma}{2(1 + \cos\gamma)}$ oder

$$= \frac{9 - 8\sin^2\frac{\gamma}{2}\cos\gamma}{4\cos^2\frac{\gamma}{2}} \text{ und}$$

10) $\cos\gamma = \frac{1}{4}[2 + m - \sqrt{(m^2 + 12m - 32)}]$, woraus hervorgeht, dass

11) für alle Werthe von m vom kleinsten in 5) ab, bis $m < 4\frac{1}{2}$ das Dreieck spitzwinklig, für $m = 4\frac{1}{2}$ rechtwinklig; fur $m > 4\frac{1}{2}$ aber stumpfwinklig wird.

V. Für welche Relation zwischen α und m überhaupt aus 1) einem Dreieck entsprechende Werthe für β sich ergeben können.

Durch Anwendung der Formel

$$2\cos x \cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y)$$

entspringt aus 1)

$$12)\ \cos(\alpha+2\beta) = \frac{4m\sin^2\alpha - 9 - 4\cos^2\alpha}{4\cos\alpha}.$$

Ist nun $m > \frac{9+4\cos^2\alpha}{4\sin^2\alpha}$, so muss $\cos\alpha > \frac{4m\sin^2\alpha - 9 - 4\cos^2\alpha}{4\cos\alpha}$ sein, und es ergeben sich die Grenzbestimmungen:

$$m > \frac{9+4\cos^2\alpha}{4\sin^2\alpha} \text{ und } m < \frac{9+8\cos^2\alpha}{4\sin^2\alpha}.$$

Ist aber $m < \frac{9+4\cos^2\alpha}{4\sin^2\alpha}$, also $\cos(\alpha+2\beta)$ negativ, so muss $1 > \frac{9+4\cos^2\alpha - 4m\sin^2\alpha}{4\cos\alpha}$ sein, und die Grenzbestimmungen werden $m > \frac{9+4\cos^2\alpha - 4\cos\alpha}{4\sin^2\alpha}$ und $m < \frac{9+4\cos^2\alpha}{4\sin^2\alpha}$; sind also

$$13)\ m > \frac{9+4\cos^2\alpha - 4\cos\alpha}{4\sin^2\alpha} \text{ und } m < \frac{9+8\cos^2\alpha}{4\sin^2\alpha}.$$

Aus 12) ergiebt sich auch ausserdem

$$\cos(\alpha+\beta)\cos\beta = \frac{4m\sin^2\alpha - 9}{8\cos\alpha},$$

woraus sogleich erhellet, dass

14) wenn $9 \left\{\begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix}\right\} 4m\sin^2\alpha$ ist, dann $\alpha+\beta \left\{\begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix}\right\} 90^0$, also

$$\gamma \left\{\begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix}\right\} 90^0 \text{ wird.}$$

Die Grenzen für α durch m ausgedrückt, der Bedingung 13) entsprechend, werden:

$$15)\ \cos\alpha > \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{4m-9}{m+2}} \text{ und } \cos\alpha \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} \frac{1}{2(m+1)}[1 \pm \sqrt{(4m^2-5m-8)}]$$

letztere mit dem Zeichen — kommt nur in Betracht, wenn $m < \frac{9}{4}$ ist.

VI. **Beispiele.**

1) Gegeben $\gamma = 90^0$; $m = 3$; gesucht α.

$$\alpha = 60^0.$$

2) Gegeben $\alpha = \beta$; $\gamma = 60^0$; gesucht m.

$$m = 2\tfrac{2}{3}.$$

3) Gegeben $\alpha = \beta$; $m = 2\frac{1}{2}$; gesucht γ.

$$\cos\gamma = \frac{9 - \sqrt{17}}{8};\ \gamma = 52^0\,26'\,19''.$$

4) Gegeben $\alpha = \beta$; $m = 4\frac{1}{2}$; gesucht γ.

$$\gamma = 90^0.$$

5) Gegeben $\alpha = \beta$; $m = 10$; gesucht γ.

$$\cos\gamma = \frac{6 - \sqrt{47}}{2};\ \gamma = 115^0\,19'\,47''.$$

6) Gegeben $\alpha = 60^0$; gesucht die Grenzen für m.

Es kann m zwischen $\frac{10}{3}$ und $\frac{11}{3}$, auch zwischen $\frac{8}{3}$ und $\frac{10}{3}$ liegen.

7) [zu 6)] Gegeben $\alpha = 60^0$; $m = 3\frac{1}{2}$; gesucht β, γ.

$$\beta = 7^0\,45'\,40\tfrac{1}{2}'';\ \gamma = 112^0\,12'\,19\tfrac{1}{2}''.$$

8) [zu 6)] Gegeben $\alpha = 60^0$; $m = 3$; gesucht β, γ.

$$\beta = 30^0;\ \gamma = 90^0.$$

9) Gegeben $m = 2{,}2$; gesucht die Grenzen für α.

Es folgt aus der zweiten Grenze in 15), dass α zwischen $75^0\,32'$ und $86^0\,25'$ liegen muss.

10) [zu 9)] Gegeben: $m = 2{,}2$; $\alpha = 80^0$; gesucht β und γ.

$$\beta = 33^0\,45';\ \gamma = 66^0\,15'.$$

11) Gegeben $m = 6$; gesucht die Grenzen zu α.

Es muss α zwischen $36^0\,12'\,46''$ und $46^0\,47'\,30''$ genommen werden.

12) [zu 11)] Gegeben $m = 6$; $\alpha = 45^0$; gesucht β und γ.

$$\beta = 12^0\,8'\,51\tfrac{1}{2}'';\ \gamma = 122^0\,51'\,8\tfrac{1}{2}''.$$

Achte Aufgabe.

Zu Bestimmung eines Dreiecks ist gegeben: eine Seite desselben $AB = a$; der Halbmesser r des umschriebenen und der ϱ des eingeschriebenen Kreises.

I. Lösung.

Kann den Werthen von a, r, ϱ ein Dreieck oder können auch mehrere entsprechen, so erscheint dann a als Sehne des mit r beschriebenen Kreises und es können im Allgemeinen sowohl einerseits als andererseits $AB = a$ zwei unter sich congruente Dreiecke existiren, deren Winkel, AB gegenüber, sich zu 180° ergänzen. Zum spitzen Winkel α_1 sei C_1, zum stumpfen α_2 sei C_2 der Eckpunkt und α bezeichne beide, wenn nur einer derselben gemeint ist; φ den Winkel in A. Die Bedingungsgleichungen zur Bestimmung von α und φ werden dann:

1) $2r \sin \alpha = a,$

2) $\varrho \left(cotg \frac{\varphi}{2} + tg \frac{\alpha_1 + \varphi}{2} \right) = a$ zu ABC_1,

3) $\varrho \left(cotg \frac{\varphi}{2} + tg \frac{\alpha_2 + \varphi}{2} \right) = a$ zu ABC_2, aus welchen beiden Letzteren die

4) $\sin \left(\frac{\alpha}{2} + \varphi \right) = \sin \frac{\alpha}{2} + \frac{2\varrho}{a} \cos \frac{\alpha}{2}$ folgt.

II. Grenzbestimmungen.

Es folgen aus 1) und 4) die beiden

5) $a \leqq 2r$ und

6) $\sin \frac{\alpha}{2} + \frac{2\varrho}{a} \cos \frac{\alpha}{2} \leqq 1,$

und aus letzterer, weil $\sin \frac{\alpha}{2}$ nie $= 1$ sein kann,

7) $\sin \frac{\alpha}{2} \leqq \frac{a^2 - 4\varrho^2}{a^2 + 4\varrho^2}.$

Die Entwicklung von $\sin \frac{\alpha}{2}$ aus 1) giebt aber

8) $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4} - \left(\frac{a}{4r} \right)^2 \right)}$

und es folgen daher aus 7) und 8) die Grenzbedingungen

9) $\left(\frac{a^2 - 4\varrho^2}{a^2 + 4\varrho^2} \right)^2 \geqq \frac{1}{2} - \sqrt{\left(\frac{1}{4} - \left(\frac{a}{4r} \right)^2 \right)}$ zu ABC_1 und

10) $\left(\frac{a^2-4\varrho^2}{a^2+4\varrho^2}\right)^2 \geqq \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{4} - \left(\frac{a}{4r}\right)^2\right)}$ zu ABC_2

oder, nach erfolgter Reduktion,

11) $(a^2 + 4\varrho^2)^2 \leqq 16 r\varrho\,(a^2 - 4\varrho^2)$ zu ABC_1,

12) $(a^2 + 4\varrho^2)^2 \geqq 16 r\varrho\,(a^2 - 4\varrho^2)$ zu ABC_2.

Ist nun ϱ und $a > 2\varrho$ gegeben, so folgen für r die Grenzformeln:

13) $r \geqq \frac{(a^2 + 4\varrho^2)^2}{16\varrho\,(a^2 - 4\varrho^2)}$ zu ABC_1,

14) $r \leqq \frac{(a^2 + 4\varrho^2)^2}{16\varrho\,(a^2 - 4\varrho^2)}$ zu ABC_2.

Ist ϱ und $r \geqq 2\varrho$ gegeben und wird

$4\varrho[2r - \varrho - 2\sqrt{(r^2 - 2r\varrho)}]$ durch P^2 und $4\varrho[2r - \varrho + 2\sqrt{(r^2 - 2r\varrho)}]$ durch Q^2 ausgedrückt, so muss

15) $a \geqq P$, sowie $\leqq Q$ zu ABC_1 und

16) a von P bis Q zu ABC_2 genommen werden.

Ist r und $a \leqq 2r$ gegeben und werden die Grenzen für ϱ gesucht, so folgt aus 9) und 10), wenn $2r$ durch R^2, $2r + a$ durch G^2 und $2r - a$ durch K^2 bezeichnet wird,

$$\frac{a^2 - 4\varrho^2}{a^2 + 4\varrho^2} \geqq \frac{G \mp K}{2R}$$

woraus allmählig

$$4\varrho^2[2R + G \mp K] \leqq a^2[2R - (G \mp K)];$$

$$8\varrho^2[2r \pm \sqrt{(4r^2 - a^2)}] \leqq a^2[2R - G \pm K]^2;$$

$$4\varrho^2(G \pm K)^2 \leqq a^2(2R - G \pm K)^2;$$

$$2\varrho \leqq \tfrac{1}{2}(2R - G \pm K)(G \mp K);$$

$$2\varrho \leqq (G - R)(R \pm K)$$

entsteht, also sich ergiebt, dass zu ABC_1

17) $2\varrho \leqq [\sqrt{(2r + a)} - \sqrt{2r}]\,[\sqrt{2r} + \sqrt{(2r - a)}]$ und zu ABC_2

18) $2\varrho \leqq [\sqrt{(2r + a)} - \sqrt{2r}]\,[\sqrt{2r} - \sqrt{(2r - a)}]$

gewählt werden muss.

Es existirt demnach zu allen Werthen von 2ϱ, grösser als die obere Grenze, kein Dreieck; zwischen beiden Grenzwerthen, dieselben eingeschlossen, nur ein Dreieck ABC_1; zu allen Werthen von 2ϱ aber, welche kleiner als die untere Grenze sind, existiren immer zwei Dreiecke ABC_1 und ABC_2.

Die Grenzen für 2ϱ in 17) und 18) ergeben sich auch aus folgender Ansicht:

In allen Dreiecken ABC_1 denselben a, r und also auch α_1 entsprechend, gehört zu dem, in welchen $AC_1 = BC_1$ ist, der grösste Werth ϱ_1 für ϱ und ebenso in allen Dreiecken ABC_2 zu $AC_2 = BC_2$ der grösste Werth ϱ_2 für ϱ. Es ist aber

$$19) \begin{Bmatrix} \varrho_1 = \frac{a}{2} tg \frac{\alpha_2}{4} \\ \varrho_2 = \frac{a}{2} tg \frac{\alpha_1}{4} \end{Bmatrix}$$

und aus $sin\,\alpha = \frac{a}{2r}$ folgt

$$20) \left(\tfrac{1}{2} - sin^2\frac{\alpha}{4}\right)^4 - \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{2} - sin^2\frac{\alpha}{4}\right)^2 + \left(\frac{a}{16r}\right)^2 = 0,$$ also, weil

$sin^2\frac{\alpha}{4} < \frac{1}{2}$ bleiben muss:

$$21) \; sin^2\frac{\alpha}{4} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{2r \pm \sqrt{(4r^2 - a^2)}}{r}},$$ woraus

$$22) \; a\,tg\frac{\alpha}{4} = [\sqrt{(2r+a)} - \sqrt{2r}]\,[\sqrt{2r} \mp \sqrt{(2r-a)}]$$ folgt und

dann aus 19) dieselben Grenzen wie in 17) und 18) sich ergeben.

Beispiele, nur in Minuten berechnet.

1) Ist $a = 10$; $\varrho = 4$; so fällt der Grenzwerth für r zwischen 11 und 12; zu $r = 12$ wird $\alpha_1 = 24^0\,37'$ und $\varphi = 67^0\,42'$ oder $87^0 41'$; zu $r = 10$ existirt für φ kein Werth.

2) Ist $a = 20$; $\varrho = 1$, so fällt die Grenze für r zwischen 25 und 26; zu $r = 40$ wird $\alpha_1 = 14^0 28'$ und $\varphi = 5^0 46'$ oder $159^0 46'$; zu $r = 20$; wird $\alpha_1 = 150^0$ und $\varphi = 7^0\,39'$ oder $22^0 21'$.

3) Ist $r=9$; $\varrho=2{,}5$, so sind 35 und 275 die Grenzen für a^2; zu $a=9$ folgt $\alpha_1=30^\circ$ und $\varphi=37^\circ 42'$ auch $112^\circ 18'$; zu $a=18$ entsteht $\alpha=90^\circ$ und $\varphi=19^\circ 37'$ oder $70^\circ 23'$.

4) Ist $a=2r$, so folgt $\alpha=90^\circ$; $\varrho \leqq (\sqrt{2}-1)\,r$; zu $\varrho=0{,}4r$ wird $\varphi=36^\circ 52'$ oder $53^\circ 8'$.

5) Ist $a=r$, so wird $\alpha_1=30^\circ$; $\alpha_2=150^\circ$ und $\varrho \leqq 0{,}38366\,a$; und $\varrho \leqq 0{,}065825 . a$ zu $\varrho=\frac{a}{3}$ und $\alpha_1=30^\circ$ entspringt nur

$$\varphi=49^\circ 31' \text{ oder } 100^\circ 29',$$

zu $\varrho=\frac{a}{3}$ und $\alpha_2=150^\circ$ existirt φ nicht,

zu $\varrho=0{,}05\,a$ und $\alpha_1=30^\circ$ wird $\varphi=5^\circ 49'$ oder $144^\circ 10'$,

zu $\varrho=0{,}05\,a$ und $\alpha_2=150^\circ$ entsteht $\varphi=7^\circ 29'$ oder $22^\circ 21'$.

Druck von H. W. Schmidt in Halle.